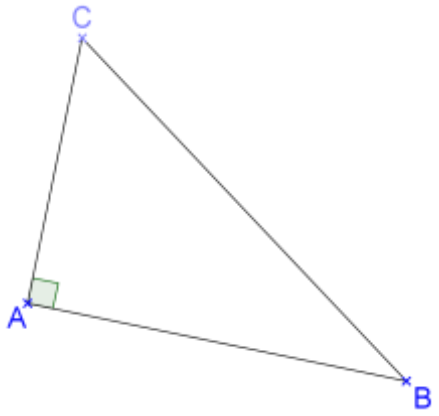
Chapitre 6 : Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

I - Rappel : cosinus d'un angle aigu.

1) Vocabulaire :

Soit ABC un triangle rectangle en A. Le côté opposé (face) à l'angle droit est l'**hypoténuse**. Ici c'est



Si on s'intéresse à l'angle $\widehat{ABC}$:

Le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$ est **[AC].**

Le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ est **[AB].**

Si on s'intéresse à l'angle $\widehat{ACB}$:

Le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$ est **[AB].**

Le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$ est **[AC].**

Remarque : $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$ On dit que ces deux angles sont **complémentaires.**

2) Formule du cosinus (4ème).

Définition :

Soit ABC un triangle rectangle en A.

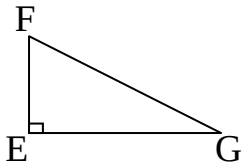
On appelle cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$, le quotient de la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ par la longueur de l'hypoténuse.

On a : $\cos \widehat{ABC} = \frac{BA}{BC}$ **et** **$\cos \widehat{ACB} = \frac{CA}{CB}$**

Remarque : Comme l'hypoténuse est le plus grand côté, le cosinus d'un angle est toujours plus petit que 1.

3) Exemples.

a) Soit EFG rectangle en E tel que $\widehat{EGF} = 35°$ et FG = 5 cm. Calculer EG.

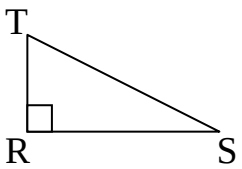


Dans le triangle EFG rectangle en E, on a :

$\cos \widehat{EGF} = \frac{EG}{GF}$ donc $\frac{\cos 35°}{1} = \frac{EG}{5}$

d'où $EG = 5 \times \cos 35° \approx 4{,}1$ cm

b) Soit RST rectangle en R tel que RS = 10 cm et ST = 12 cm. Calculer $\widehat{RST}$. Arrondir au dixième.



Dans le triangle RST rectangle en R, on a :

$\cos \widehat{RST} = \frac{RS}{ST}$ donc $\cos \widehat{RST} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

A l'aide de la calculatrice, on a : $\widehat{RST} \approx 33{,}6°$.

2nd	cos	(	5	÷	6	)

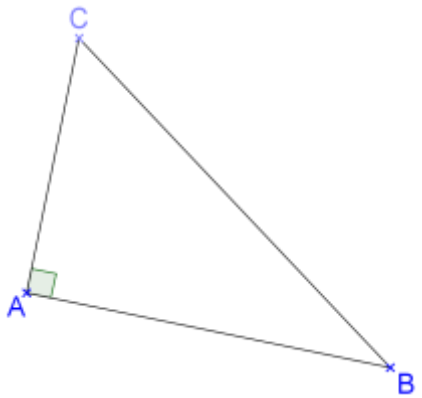
II – Sinus et tangente.

1) Formules.

$\cos = \dfrac{(\text{côté adjacent})}{(\text{hypoténuse})}$	$\sin = \dfrac{(\text{cot é.opposé})}{(\text{hypoténuse})}$	$\tan = \dfrac{(\text{cot é.opposé})}{(\text{cot é.adjacent})}$

Trois moyens mnémotechniques : **CA SO TO** **SOH CAH TOA** **CAH SOH TOA**
H H A

Soit ABC un triangle rectangle en A.



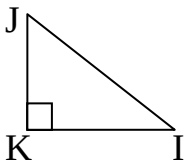
$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$

$\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$

$\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$

2) Exemples (*on arrondira au dixième près*) :

a) Soit IJK rectangle en K tel que IJ = 8 cm et $\widehat{JIK} = 50°$. Calculer KJ.

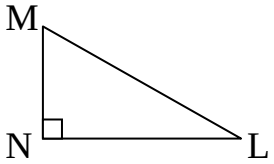


Dans le triangle IJK rectangle en K, on a :

$\sin \widehat{JIK} = \dfrac{KJ}{IJ}$ donc $\dfrac{\sin 50°}{1} = \dfrac{KJ}{8}$

d'où KJ = 8×sin50° ≈ 6,1 cm

b) Soit LMN rectangle en N tel que LN = 6,5 cm et NM = 3 cm. Calculer $\widehat{LMN}$ puis $\widehat{MLN}$



Dans le triangle LMN rectangle en N, on a :

a) $\tan \widehat{LMN} = \dfrac{LN}{MN}$ donc $\tan \widehat{LMN} = \dfrac{6,5}{3}$

A l'aide de la calculatrice, on a : $\widehat{LMN} \approx 65,2°$.

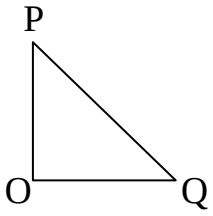
2nd	tan	(	6,5	÷	3	)

b) $\tan \widehat{MLN} = \dfrac{MN}{LN}$ donc $\tan \widehat{MLN} = \dfrac{3}{6,5}$

A l'aide de la calculatrice, on a : $\widehat{LMN} \approx 24,8°$.

2nd	tan	(	3	÷	6,5	)

c) Soit OPQ rectangle en O tel que OP = 5 cm et QP = 7 cm. Calculer $\widehat{OQP}$.



Dans le triangle OPQ rectangle en Q, on a :

$\sin \widehat{OQP} = \dfrac{OP}{PQ}$ donc $\sin \widehat{OQP} = \dfrac{5}{7}$

A l'aide de la calculatrice, on a : $\widehat{OQP} \approx 45,6°$.

2nd	sin	(	5	÷	7	)

III - Deux relations fondamentales de trigonométrie (sur l'iPad).

TP sur tableur : iPad (Numbers).

Objectif : Conjecturer deux relations entre cos *x*, sin *x* et tan *x*.

Ouvrir une feuille de calcul vierge et reproduire le tableau ci-dessous.
1ère colonne : Pour aller de 5 en 5 écrire 0 et 5 puis cliquez sur OK.
Sélectionner les 2 cellules qui contiennent 0 et 5. Cliquer sur **remplissage** puis tirer vers le bas jusqu'à 90°.

Angle x (en °)	Angle x (en rad)	cos x	sin x	tan x	$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$(\cos x)^2$	$(\sin x)^2$	$(\cos x)^2+(\sin x)^2$
0								
5								
10								
80								
85								
90								

2ème colonne (Angle *x (en rad)*) : Attention il faut transformer les degrés en radians !
Pour cela, utiliser la **fonction radians** *(appuyer sur =)* pour convertir les degrés en radians. On convertit d'abord l'angle de 0° puis, en sélectionnant **remplissage**, on tire vers le bas pour convertir les autres angles.

3ème, 4ème et 5ème colonnes : utiliser les fonctions cos, sin et tan pour l'angle de 0° et le **remplissage** pour copier les formules vers le bas (il faut prendre les angles en radians).
Pour utiliser les formules cos, sin et tan il faut cliquer sur = puis fonctions.

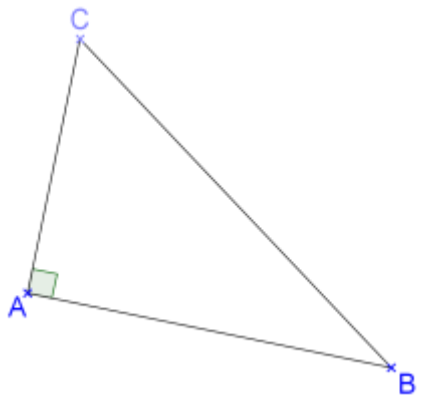
6ème colonne : pour calculer $\frac{\sin x}{\cos x}$ pour l'angle de 0°, il faut utiliser la touche ÷. Utiliser le **remplissage** pour compléter le reste de la colonne.

7ème et 8ème colonnes : utiliser la fonction produit pour obtenir les carrés. Puis **remplissage** pour copier vers le bas.

9ème colonne : utiliser la fonction somme pour obtenir les sommes. Puis **remplissage** pour copier vers le bas.

On peut conjecturer que : $\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{et} \quad (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1}$

2) Démonstration.



$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$ donc $(\cos \widehat{ABC})^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2}$

$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$ donc $(\sin \widehat{ABC})^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AC^2}{BC^2}$

Théorème de Pythagore

$(\cos \widehat{ABC})^2 + (\sin \widehat{ABC})^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2+AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$

Conclusion, quel que soit le nombre *x* : $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$