Chapitre 4 : Géométrie dans l'espace.

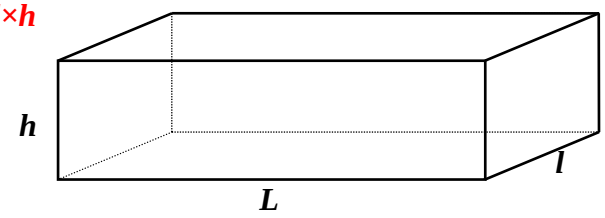
http://mathocollege.free.fr/3d/

I. Rappels : formules et unités.

1) Le cube, le pavé.

Le pavé a trois dimensions habituellement appelées longueur (L), largeur (l) et hauteur (h).

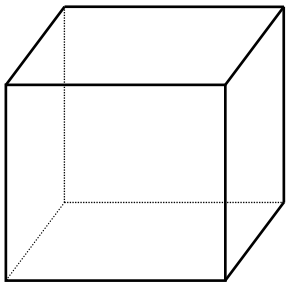
Volume : V = ***L×l×h***



Le cube est un cas particulier de pavé pour lequel les trois dimensions sont identiques.

V = $a \times a \times a = a^3$ ***avec a : longueur d'une arête.***

Représentation en perspective cavalière :



Vocabulaire :

Un cube (comme un pavé) a :

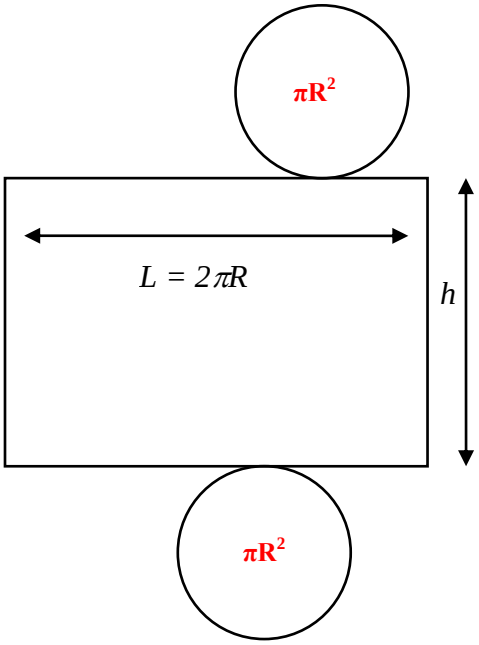
- **8** sommets
- **6** faces
- **12** arêtes

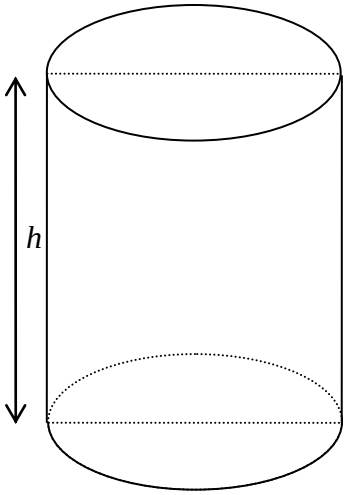
L'aire totale du cube, c'est l'aire des six faces, soit $6 \times a^2$.

2) le cylindre de révolution.

Un cylindre possède deux bases parallèles qui sont des disques de rayon R.

Sa surface latérale est constituée d'un rectangle replié autour de ces deux disques.





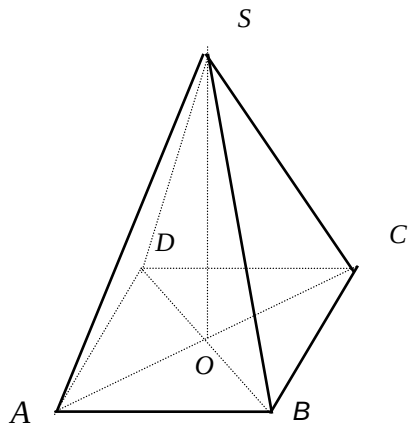
Volume du cylindre :

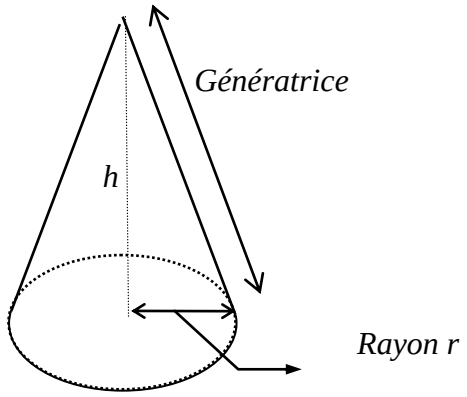
V = aire de la base×hauteur

$V = \pi R^2 \times h$

Aire du cylindre A = $2\pi R \times h + 2 \times \pi R^2$

3) Pyramides et cônes.





Volume d'une pyramide $= \dfrac{aire.de.la.base \times hauteur}{3}$

Volume d'un cône $= \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$

II. Sphères et boules.

1) Définitions.

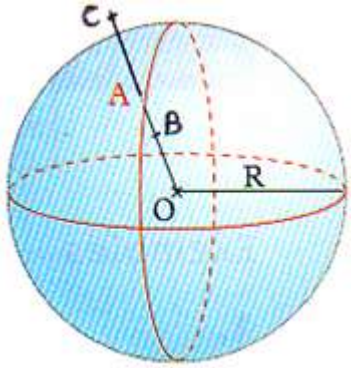
- « Sphère » du grec sphaira (balle à jouer)

La sphère **S** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que OM = R

Exemple : balle de ping-pong

- La boule ***B*** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $\mathbf{OM \leq R}$

Exemple : boule de pétanque.



B $\in$ ***B;*** B $\notin$ ***S;*** A $\in$ ***B;*** A $\in$ ***S;*** C $\notin$ ***B;*** C $\notin_S$ ***S***

2) Aire de la sphère.

$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$

Exemple : Surface terrestre (rayon de la terre $\approx$ 6370km)

$A = 4\pi r^2 = 4\times\pi\times 6370^2 \approx 510\ 000\ 000\ km^2$

Info : 71 % de la surface de la Terre *est* recouverte d'eau *(97 %* d'eau *salée et 3 %* d'eau *douce).*

3) Volume de la boule.

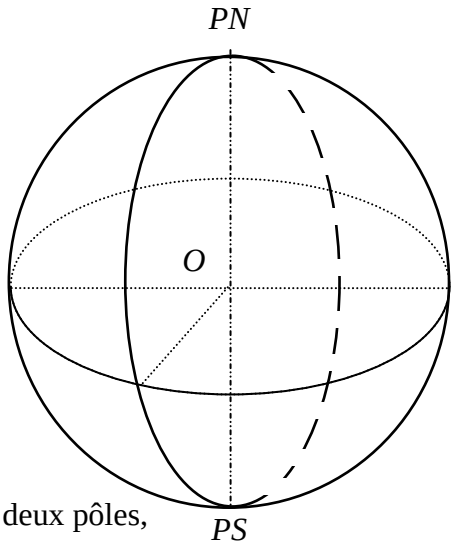
$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Exemple : Volume de la terre

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\times\pi\times 6370^3 \approx 1{,}1\times 10^{12}\ km^3$

4) La terre.

La Terre est une boule (légèrement aplatie aux pôles) dont le **rayon est arrondi à 6 400 km.**
Le segment formé par les deux pôles est un diamètre de la Terre.

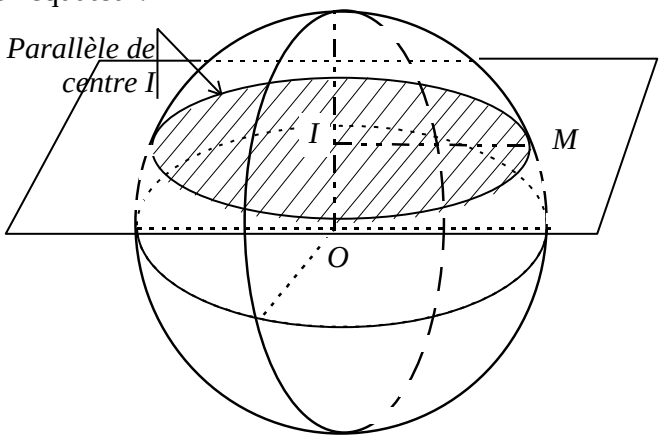


L'équateur est un **grand cercle** de la Terre; sa longueur se calcule donc par la formule : $L = 2\pi R$, où R est le rayon de la Terre. On obtient :

$L = 2\times\pi\times6400 \approx 40\ 200$ km

Tous les **méridiens** sont d'autres grands cercles, passant eux par les deux pôles, et leur longueur est aussi d'environ 40 000 km.

Un **parallèle** est un petit disque de la Terre, déterminé par la section de la Terre par un plan parallèle au plan de l'équateur.

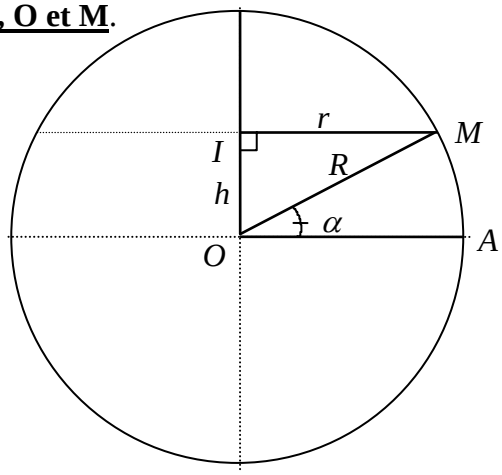


La longueur d'un parallèle dépend de son rayon; ce rayon dépend de la longueur séparant le centre du parallèle du centre de la Terre.

Mais les parallèles ont été repérés d'une autre manière. C'est l'angle formé par un point de l'équateur, le centre de la Terre et un point du parallèle qui va permettre de déterminer le parallèle. Cet angle porte le nom de **latitude**.

Plaçons-nous dans le plan contenant les points O, I et M.
Le point M est un point du parallèle de centre I.
La latitude de ce parallèle est l'angle α, formé par les points A, O et M.

Les droites (IM) et (AO) étant parallèles, les angles $\widehat{MOA}$ et $\widehat{IMO}$ sont alternes - internes, donc **ils sont de même mesure.**



La latitude d'un parallèle est un angle compris entre 0° et 90°; on ajoute une indication de sens pour dire si le parallèle est entre l'équateur et le pôle Nord, ou bien entre l'équateur et le pôle Sud.

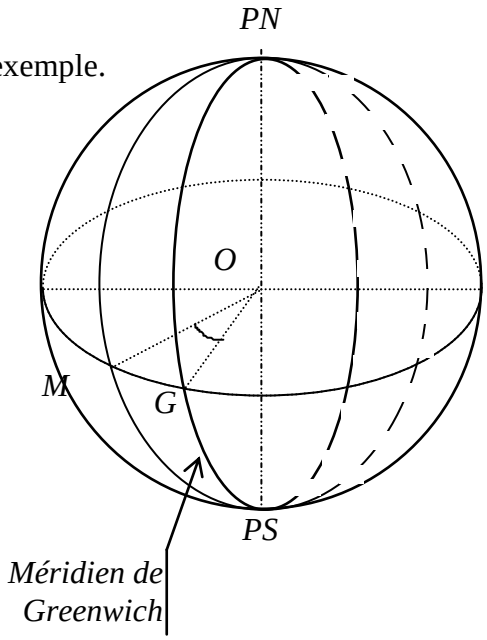
On dira donc d'un point qu'il a une latitude de 42°N ou de 38°S, par exemple.

Coordonnées géographiques :

Pour repérer un point sur la Terre, on le situe à la fois sur un méridien et sur un parallèle.

Chaque méridien est repéré par rapport à un méridien de référence: le méridien de **Greenwich.**

Si M est le point d'un méridien situé sur l'équateur, et G le point du méridien de Greenwich situé sur l'équateur, l'angle GOM est la **longitude** du méridien passant par le point M.



La longitude d'un méridien est un angle compris entre 0° et 180°; on ajoute une indication de sens pour dire si le méridien est à l'Est ou à l'Ouest du méridien de Greenwich.

On dira donc d'un point qu'il a une longitude de 42°E ou de 138°O, par exemple.

Exemple : les coordonnées géographiques de **New York** sont :

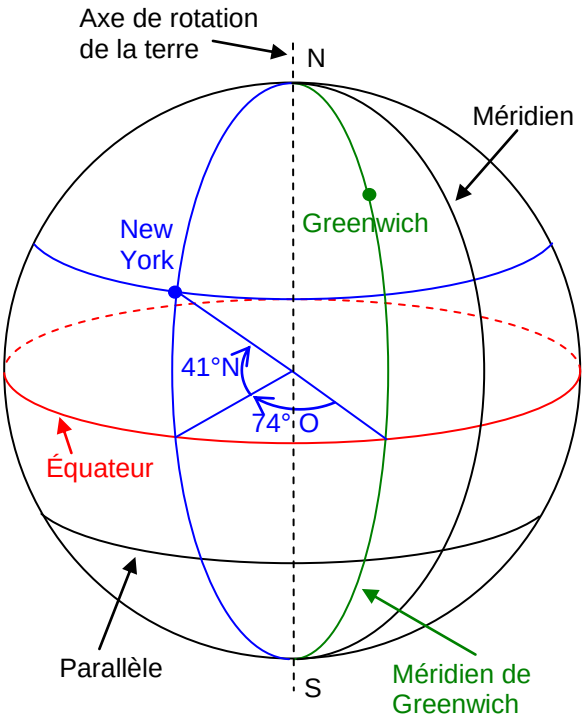
(74°O; 41°N)

Longitude Latitude

Les coordonnées géographiques de **Brive** sont :

(1°E; 45°N)

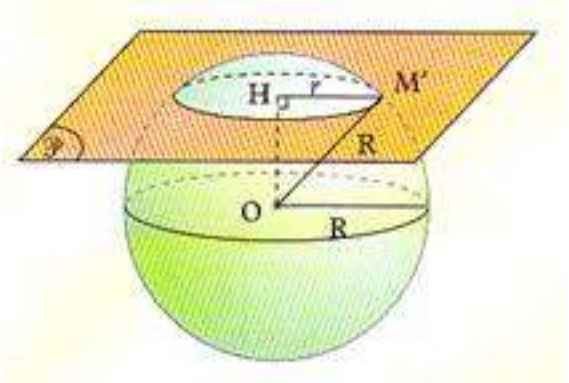
Longitude Latitude



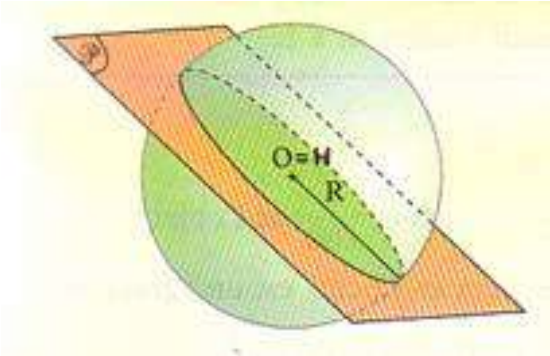
III. Sections de solides par un plan (Télécharger les fichiers GeoGebra).

1) Section d'une sphère par un plan.

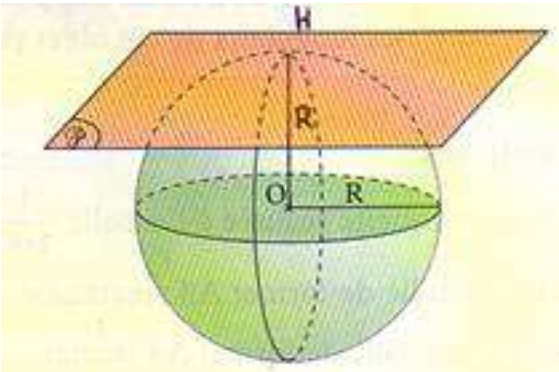
La section d'une sphère par un plan est un cercle.



Cas particuliers : **a)** Si OH = 0, alors r = R
Le plan passe par le centre de la sphère.
La section est un **GRAND CERCLE.**

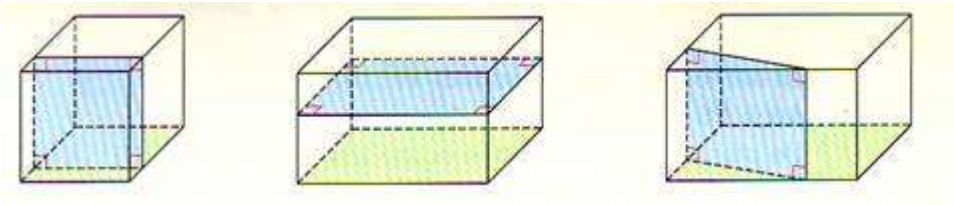


b) Si OH = R, alors r = 0
Le plan et la sphère ont un seul point commun.
On dit que le plan est **TANGENT** à la sphère.



2) Parallélépipède rectangle.

Plan parallèle à une face

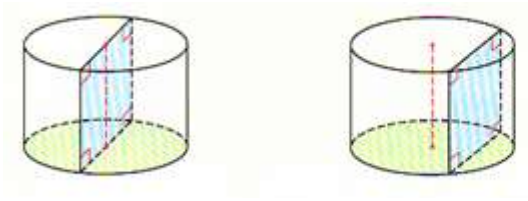


Plan parallèle à une arête

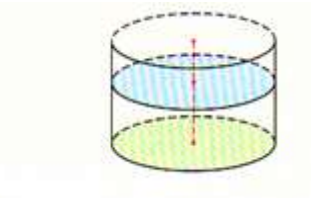
La section est un rectangle.

3) Cylindre.

Plan parallèle à l'axe



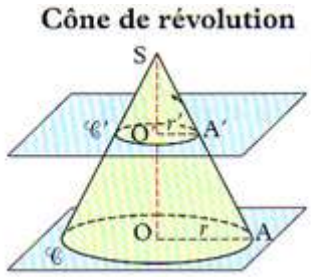
Plan perpendiculaire à l'axe

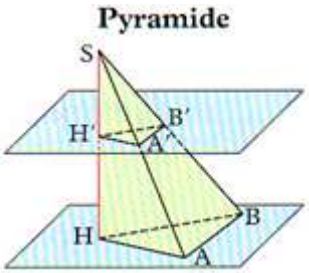


La section est un rectangle. **La section est un disque.**

4) Cône et pyramide.

Plan parallèle à la base





La section est un disque. **La section est un polygone (réduction du polygone de la base).**

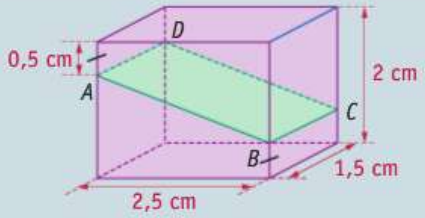
Exercices :

Exercice type avec solution :

Énoncé : Sur la figure ci-contre, le quadrilatère *ABCD* est la section d'un pavé droit par un plan parallèle à l'arête bleue.

1) Préciser la nature du quadrilatère *ABCD*.

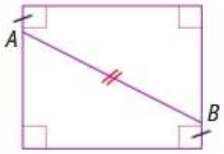
2) Représenter en vraie grandeur la face avant du pavé, puis le quadrilatère *ABCD*.



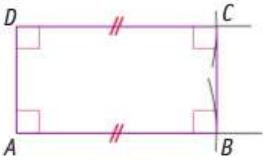
Solution : **1)** La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une arête est un rectangle.

Donc, *ABCD* est un rectangle.

2)



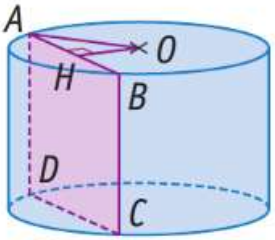
Dans le rectangle *ABCD*, on a *AD* = 1,5 cm.



Exercice 1 :

Sur la figure ci-dessous, le quadrilatère *ABCD* est la section d'un cylindre de révolution de hauteur 4 cm par un plan parallèle à son axe.

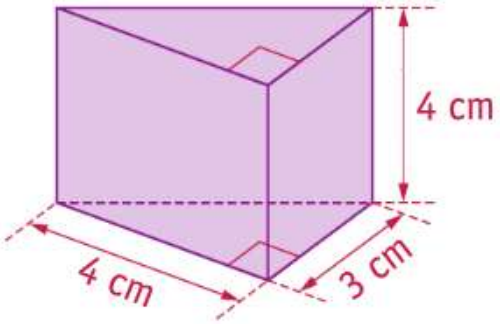
On donne : *OA* = 3 cm et *OH* = 2 cm.



Représenter en vraie grandeur le quadrilatère *ABCD*.

Exercice 2 :

Un prisme ayant pour base un triangle rectangle est représenté ci-dessous.

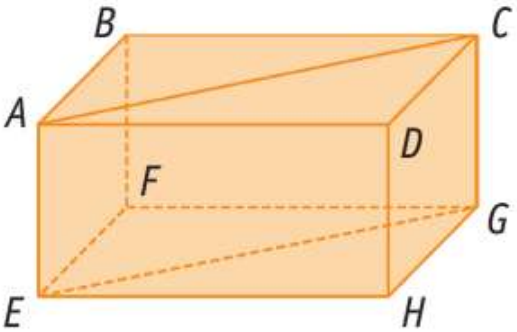


1) Combien a-t-il d'arêtes ? de faces ? de sommets ?

2) Tracer un patron de ce prisme en vraie grandeur.

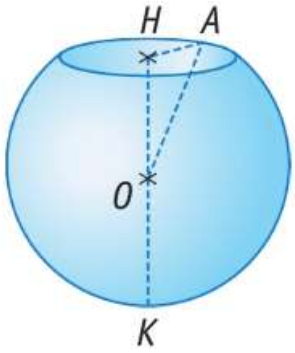
Exercice 3 :

On considère le pavé droit *ABCDEFGH* représenté ci-dessous. Observer la figure et compléter le tableau ci-après sans justification.



Objet	Nature de l'objet
triangle *ABC*	
angle $\widehat{ABF}$	
quadrilatère *ABFE*	
angle $\widehat{ACG}$	
quadrilatère *ACGE*	

Exercice 4 :



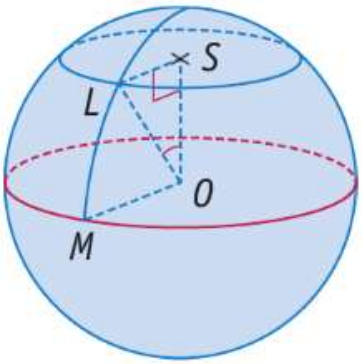
Un doseur de lessive, représenté ci-contre, a la forme d'une calotte sphérique de centre O et de rayon $OA = 4{,}5$ cm.

L'ouverture de ce récipient est délimitée par le cercle de centre H et de rayon $HA = 2{,}7$ cm.

1) Dessiner en vraie grandeur le triangle AHO.

2) Calculer OH en justifiant, puis en déduire que la hauteur totale $[HK]$ du doseur mesure exactement 8,1 cm.

Exercice 5 :



Le dessin ci-contre représente la Terre qui est assimilée à une sphère de 6 370 km de rayon. Le cercle rouge passant par le point M représente l'équateur. Le point L représente la ville de Londres.

L est situé sur la sphère et sur le cercle de centre S.

On admet que l'angle $\widehat{LSO}$ est droit.

On donne $OS = 4\,880$ km.

1) Calculer SL au kilomètre près.

2) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{SOL}$ et arrondir au degré près.

3) En déduire au degré près la latitude Nord de Londres par rapport à l'équateur, c'est-à-dire l'angle $\widehat{LOM}$.