Chapitre 3 : Puissances.

I. Puissances d'un nombre relatif.

1) Exposant entier positif.

Définition :

a désigne un nombre relatif et n un entier positif non nul.

a^n désigne le produit de n facteurs égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Le nombre n s'appelle un ***exposant***.

Exemple :

3^4 est le produit de 4 facteurs égaux à 3. Donc : $3^4 = 3\times3\times3\times3 = 81$

Cas particulier : $a^1 = a$ exemple : $5^1 = 5$

Convention : pour $a \neq 0$, on convient que : $a^0 = 1$ exemple : $7^0 = 1$

Attention : Ne pas confondre !!!

$(-5)^4 = (-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5) = +625$

$-5^4 = -5\times5\times5\times5 = -625$

2) Exposant entier négatif.

Définition :

a désigne un nombre relatif non nul. n désigne un entier non nul.

a^{-n} désigne l'inverse de a^n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemple :

2^{-3} est l'inverse de 2^3 donc $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Cas particulier :

Pour $a \neq 0$, a^{-1} est l'inverse de a.

Exemple :

5^{-1} est l'inverse de 5. Donc, $5^{-1} = \frac{1}{5}$

3) Rappel : Puissances de 10.

$10^5 = 100\,000$
$10^9 = 1\,000\,000\,000$
$10^1 = 10$
Attention : Par **convention** $10^0 = 1$

$10^{-5} = 0{,}000\,01$
$10^{-1} = 0{,}1$
$10^{-9} = 0{,}000\,000\,001$

II- Calculer avec des puissances.

Règles :

a désigne un nombre relatif non nul.

n *et* ***p*** désignent deux nombres entiers relatifs.

PRODUIT	QUOTIENT	PUISSANCE D'UNE PUISSANCE
$a^n \times a^p = a^{n+p}$	$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$(a^n)^p = a^{n\times p}$

Applications :

$5^2\times5^4 = 5^{2+4} = 5^6$

$(-8)^7\times(-8)^{-11} = (-8)^{7+(-11)} = (-8)^{-4}$

$(11^7)^9 = 11^{7\times9} = 11^{63}$

$\frac{4^7}{4^2} = 4^{7-2} = 4^5$

$\frac{4^{17}}{4^{22}} = 4^{17-22} = 4^{-5}$

Cas où *a* = 10 :

$10^4\times10^{-7} = 10^{4+(-7)} = 10^{-3}$

$\frac{1}{10^5} = \frac{10^0}{10^5} = 10^{0-5} = 10^{-5}$

$\frac{1}{10^{-3}} = \frac{10^0}{10^{-3}} = 10^{0-(-3)} = 10^3$

$\frac{10^{12}}{10^8} = 10^{12-8} = 10^4$

Attention ! $\frac{10^5}{10^{-9}} = 10^{5-(-9)} = 10^{5+9} = 10^{14}$

$\frac{10}{10^7} = \frac{10^1}{10^7} = 10^{1-7} = 10^{-6}$

$(10^4)^7 = 10^{4\times7} = 10^{28}$

$(10^{-3})^{-9} = 10^{(-3)\times(-9)} = 10^{27}$

$(10^6)^{-8} = 10^{6\times(-8)} = 10^{-48}$

Règles :

a et b désignent deux nombres relatifs non nuls.

n désigne un nombre entier relatif.

$(a\times b)^n = a^n\times b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Applications :

$(5\times4)^7 = 5^7\times4^7$

$[(-8)\times4]^5 = (-8)^5\times4^5$

$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1^3}{5^3} = \frac{1}{125}$

$(5x)^2 = 5^2\times x^2 = 25x^2$

$(-2x)^3 = (-2)^3\times x^3 = -8x^3$

III- Écriture scientifique.

Rappel :
On dit qu'un nombre est **en notation scientifique (ou écriture scientifique)** lorsqu'il est écrit sous la forme « $a \times 10^n$ » où $1 \leq a < 10$ et n est un **nombre entier** positif ou négatif.

Applications :

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

A = 120 000 000 000 = $1{,}2\times10^{11}$ B = 0,000 000 000 002 1 = $2{,}1\times10^{-12}$ C = 1 000 000 = 1×10^{6}

D = 450 000×10^{8} = $4{,}5\times10^{5}\times10^{8} = 4{,}5\times10^{13}$ E = 123 000 000 000 000 000×10^{-18} = $1{,}23\times10^{17}\times10^{-18} = 1{,}23\times10^{-1}$

F = 0,000 145×10^{13} = $1{,}45\times10^{-4}\times10^{13} = 1{,}45\times10^{9}$

G = $12\times10^{-5}\times9\times10^{9} = 12\times9\times10^{-5}\times10^{9} = 108\times10^{4} = 1{,}08\times10^{2}\times10^{4} = 1{,}08\times10^{6}$

H = $2\times10^{-3} + 5\times10^{-2} = 2\times0{,}001 + 5\times0{,}01 = 0{,}002 + 0{,}05 = 0{,}052 = 5{,}2\times10^{-2}$

$$I = \frac{7\times10^{-12}\times6\times10^{5}}{21\times10^{4}} = \frac{7\times6\times10^{-12}\times10^{5}}{21\times10^{4}} = \frac{42\times10^{-7}}{21\times10^{4}} = 2\times10^{-11}$$

Donner l'écriture décimale des nombres :

A = $10^{8} + 10^{5} + 10^{2} + 10^{-1} + 10^{-5}$

A = 100 000 000 + 100 000 + 100 + 0,1 + 0,000 01

A = 100 100 100,100 01

B = $6\times10^{-5} + 3\times10^{-2}$

B = 6×0,000 01 + 3×0,01

B = 0,000 06 + 0,03

B = 0,030 06

Sur le cahier d'exercice :

Écrire A en notation scientifique $A = \frac{8\times10^{-44}\times6\times10^{17}}{0{,}25\times10^{4}\times12\times10^{-13}}$.

$$A = \frac{8\times10^{-44}\times6\times10^{17}}{0{,}25\times10^{4}\times12\times10^{-13}} = \frac{8\times6\times10^{-44}\times10^{17}}{0{,}25\times12\times10^{4}\times10^{-13}} = \frac{48\times10^{-27}}{3\times10^{-9}} = 16\times10^{-27-(-9)} = 16\times10^{-18} = 1{,}6\times10^{-17}$$

Écrire B sous forme décimale $B = \frac{9\times10^{7}\times8\times10^{-8}}{18\times10^{2}}$

$$B = \frac{9\times10^{7}\times8\times10^{-8}}{18\times10^{2}} = \frac{9\times8\times10^{7}\times10^{-8}}{18\times10^{2}} = \frac{72\times10^{-1}}{18\times10^{2}} = 4\times10^{-1-2} = 4\times10^{-3} = 0{,}004$$

Écrire C sous forme fractionnaire simplifiée $C = \frac{21\times10^{8}\times0{,}14\times10^{12}}{18\times10^{18}}$

$$C = \frac{21\times10^{8}\times0{,}14\times10^{12}}{18\times10^{18}} = \frac{21\times0{,}14\times10^{8}\times10^{12}}{18\times10^{18}} = \frac{2{,}94\times10^{20}}{18\times10^{18}} = \frac{2{,}94}{18}\times10^{2} = \frac{2{,}94}{18}\times100 = \frac{294}{18} = \frac{49\times6}{3\times6} = \frac{49}{3}$$

Donner le signe des nombres suivants :

$D = (-15)^{12}$ Il y a 12 facteurs négatifs donc $D < 0$

$E = (-17)^{21}$ Il y a 21 facteurs négatifs donc $E > 0$

$F = 15^{-11} = \frac{1}{15^{11}}$ F est positif

$G = -17^{11}$ $G < 0$

$H = (-8)^{4}\times(-9)^{5} + (-12)^{7}$

$(-8)^{4} > 0$ et $(-9)^{5} < 0$ donc $(-8)^{4}\times(-9)^{5} < 0$.

$(-12)^{7} < 0$ donc $H < 0$

Exercice 1 :

On fera apparaître les étapes de chaque calcul.

1) Écrire $A = \dfrac{\frac{4}{3} + \frac{3}{10}}{\frac{5}{2} - \frac{2}{5}}$ sous forme de fraction irréductible.

2) Calculer $B = 5^3 - (2^4 + 7{,}5)^2$.

Exercice 2 :

1) Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

$$Q = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{3}}.$$

2) Écrire sous la forme d'une puissance d'un nombre entier : $R = (3^3)^2$ et $S = 2^4 \times 7^4$.

3) On donne $T = 5 \times 10^{-11} \times 4 \times 10^9$.

Donner l'écriture scientifique du nombre T.

Exercice 3 :

On considère les deux expressions suivantes :

$$A = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{16 \times 10^{-1} \times 2}{(10^3)^2 \times 10^{-8} \times 80}.$$

1) Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

2) Vérifier que B est un nombre entier. Écrire les étapes du calcul.

3) Brice affirme que : « *A est l'opposé de B* ».

Est-ce vrai ? Justifier la réponse.