# I. Divisibilité.

## 1) Rappels.

Un nombre entier est divisible :
- par 2, si son chiffre des unités est **0 ; 2 ; 4 ; 6 et 8** ;
- par 5, si son chiffre des unités est **0** ou **5** ;
- par 10, si son chiffre des unités est **0** ;
- par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par **3** ;
- par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par **9**.

Exemples : Parmi les nombres suivants : 84 ; 433 ; 2 124 ; 489 ; 330 ; 873 ; 147 ; 155 ; 750

**a)** Quels sont ceux qui sont divisibles par 2 ? **84 ; 2 124 ; 330 et 750.**

**b)** Quels sont ceux qui sont divisibles par 3 ? **84 ; 2 124 ; 489 ; 330 ; 873 ; 147 et 750.**

**c)** Quels sont ceux qui sont divisibles par 5 ? **330 ; 155 et 750.**

**d)** Quels sont ceux qui sont divisibles par 4 ? **84 et 2 124.**

**e)** Quels sont ceux qui sont divisibles par 3 et par 2 ? **84 ; 2 124 ; 330 et 750.**

**f)** Quels sont ceux qui sont des multiples de 9 ? **2 124 ; 873 et 155.**

## 2) Nombres premiers.

**Définition :** **Un nombre est premier s'il possède deux diviseurs uniques qui sont 1 et lui-même.**

Exemples : **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97…**

## 3) Diviseurs communs à deux entiers.

Tous les diviseurs de 60 sont : **1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60.**

Tous les diviseurs de 100 sont : **1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 et 100.**

Les diviseurs communs à 60 et 100 sont : **1, 2, 4, 5, 10 et 20.**

## 4) PGCD.

**Définition :** **Le *PGCD* de deux nombres entiers est le *Plus Grand Commun Diviseur* à ces deux entiers.**

Exemple :
Le PGCD de 60 et 100 est donc **20**, on note PGCD(100 ; 60) = **20**

**Application :** déterminer le PGCD des nombres 48 et 72.

Liste des diviseurs de 48 : **1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 20, 24 et 48.**

Liste des diviseurs de 72 : **1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72.**

Donc PGCD(48 ;72) = **24.**

## 5) Algorithme de calcul du PGCD de deux nombres entiers.

**Méthode 1:** **L'algorithme d'Euclide** (mathématicien de la Grèce antique).

**Exemple 1 :** Déterminons PGCD(252 ; 360)

- on divise le plus grand par le plus petit :

$$\begin{array}{r|l} 360 & 252 \\ \hline -\,252 & 1 \\ \hline 108 & \end{array}$$

- on divise le diviseur précédent par le reste précédent

$$\begin{array}{r|l} 252 & 108 \\ \hline -\,216 & 2 \\ \hline 36 & \end{array}$$

- on divise le diviseur précédent par le reste précédent

$$\begin{array}{r|l} 108 & 36 \\ \hline -\,108 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

- le reste est nul, on arrête.

PGCD(252 , 360) = **36** **C'est le dernier reste non nul.**

**Exemple 2 :** Calculer PGCD(1053 ; 325)

On peut présenter ces résultats sous forme d'un tableau :

**On utilise l'algorithme d'Euclide :**

| *a* | *b* | *reste* | *Calcul de reste :* |
|---|---|---|---|
| 1 053 | 325 | **78** | ← **1053 – 3×325 = 78** |
| **325** | **78** | **13** | ← **325 – 4×78 = 13** |
| **78** | **13** | **0** | ← **78 – 6×13 = 0** |

**Le PGCD est le dernier reste non nul. Donc PGCD(1053 ; 325) = 13.**

**Exemple 3 :** Calculer PGCD(462 ; 339)

**Appliquons l'algorithme d'Euclide :**

| **a** | **b** | **r** | ***Calcul du reste :*** |
|---|---|---|---|
| **462** | **339** | **123** | ← **462 – 1×339 = 123** |
| **339** | **123** | **93** | ← **339 – 2×123 = 93** |
| **123** | **93** | **30** | ← **123 – 1×93 = 30** |
| **93** | **30** | **3** | ← **93 – 3×30 = 3** |
| **30** | **3** | **0** | ← **30 – 10×3 = 0** |

**Le PGCD est le dernier reste non nul. Donc PGCD(462 ; 339) = 3.**

## Méthode 2 : Soustractions successives.

Déterminons PGCD(252,360) :

- on soustrait le plus grand par le plus petit :
  360 – 252 = 108

- on soustrait les plus petits entre eux : **252 – 108 = 144**

- on soustrait les plus petits entre eux : **144 – 108 = 36**

- on soustrait les plus petits entre eux : **108 – 36 = 72**

- on soustrait les plus petits entre eux : **72 – 36 = 36**

- on soustrait les plus petits entre eux : **36 – 36 = 0**

- la différence est nulle, on arrête.

PGCD(252,360) = **36** *(Dernière différence non nulle)*

# II. Nombres premiers entre eux.

**Exemple :**
Tous les diviseurs de 45 sont : **1, 3, 5, 9, 15 et 45.**
Tous les diviseurs de 32 sont : **1, 2, 4, 8, 16 et 32.**

Donc PGCD(45 ; 32) = **1**
On dit que 45 et 32 sont **premiers entre eux.**

**Propriété : On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est égal à 1.**

# III. Application aux fractions.

**Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.**

Pour rendre une fraction irréductible, il faut la simplifier par le PGCD de son numérateur et son dénominateur.

## Méthode :

Les fractions $\frac{45}{32}$ et $\frac{252}{360}$ sont-elles irréductibles ? Dans le cas contraire, les rendre irréductible.

***a)*** PGCD(45 ; 32) = 1 donc $\frac{45}{32}$ est irréductible.

***b)*** PGCD(252,360) = 36 donc $\frac{252}{360} = \frac{36 \times 7}{36 \times 10} = \frac{7}{10}$