Chapitre 8 : Équations et équations produit nul.

I- Rappels : Équation à une inconnue.

1) Définition.

Une équation à une inconnue est une égalité dans laquelle un nombre inconnu est désigné par une lettre.

Exemple : $3x - 12 = 5(x - 3)$

Remarques :

- Pour cette équation le plus grand exposant de x est 1 ($x^1 = x$) ; cette équation est de degré 1.
- Pour l'équation $x^2 + 1 = 4x - 1$ le plus grand exposant de x est 2 ; cette équation est de degré 2.

Résoudre une équation d'inconnue x revient à trouver toutes les valeurs possibles du nombre x (si elles existent) qui vérifient l'égalité.

Chacune de ces valeurs est une solution de l'équation.

2) Propriétés des égalités.

Rappel : On ne change pas une égalité lorsqu'on ajoute ou on soustrait un même nombre à chacun de ses membres.

a, b, c désignent des nombres relatifs.

- Si $a = b$ alors $a + c = b + c$.
- Si $a = b$ alors $a - c = b - c$.

On ne change pas une égalité lorsqu'on multiplie ou on divise par un même nombre non nul chacun de ses membres.

a, b, c désignent des nombres relatifs ($c \neq 0$).

- Si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$.
- Si $a = b$ alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

3) Résolution d'équations de degré 1 à une inconnue.

Exemple 1 : Résoudre l'équation $3x + 2 = -7x + 5$

$$3x + 2 - 2 = -7x + 5 - 2$$

$$3x = -7x + 3$$

$$3x + 7x = -7x + 3 + 7x$$

$$10x = 3$$

$$\frac{10}{10}x = \frac{3}{10}$$

$$x = 0{,}3$$

La solution de l'équation est 0,3.

Vérification : pour $x = 0{,}3$, on a :

Membre de gauche : $3 \times 0{,}3 + 2 = 0{,}9 + 2 = 2{,}9$

Membre de droite : $-7 \times 0{,}3 + 5 = -2{,}1 + 5 = 2{,}9$

Donc l'égalité est bien vérifiée.

Exemple 2 : Résoudre l'équation : $\frac{x+4}{3}-\frac{x-1}{12}=\frac{3}{4}$

$$\frac{4(x+4)}{12}-\frac{x-1}{12}=\frac{9}{12}$$ ← Mettre au même dénominateur

$$4(x+4)-(x-1)=9$$ ← Supprimer le dénominateur commun

$$4x + 16 - x + 1 = 9$$

$$3x = -8$$

$$x = -\frac{8}{3}$$ La solution de l'équation est $-\frac{8}{3}$.

II- Équation produit nul.

1) Définition.

a, b, c, d désignent des nombres relatifs.

Une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ est une équation **produit nul d'inconnue x.**

Exemple : $(5x + 3)(3x – 6) = 0$ est une équation produit nul.

$(5x + 3)(3x – 6) = 15x^2 – 30x + 9x – 18 = 15x^2 – 21x – 18$

Cette équation est une équation de degré 2.

2) Propriété.

Si un produit est nul alors l'un, au moins, de ses facteurs est nul.

a et b désignent des nombres relatifs.

Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Remarque :

Les nombres a et b peuvent être tous les deux égaux à zéro.

3) Résolution.

Résoudre l'équation $(x + 4)(x – 7) = 0$

Si un produit est nul alors l'un, au moins, de ses facteurs est nul.

$x + 4 = 0$ ou $x – 7 = 0$

$x = - 4$ ou $x = 7$

Les solutions de l'équation sont - 4 et 7.

Vérification :

Pour $x = -4$, on a : $(x + 4)(x – 7) = (-4 + 4)\times(-4 – 7) = 0\times(-11) = 0$ L'égalité est bien vérifiée pour $x = - 4$.

Pour $x = 7$, on a : $(x + 4)(x – 7) = (7 + 4)\times(7 – 7) = 11\times0 = 0$ L'égalité est bien vérifiée pour $x = 7$.

4) Résolution d'une équation du type $x^2 = a$

Résoudre l'équation $x^2 = 9$

$x^2 – 9 = 9 – 9$

$x^2 – 9 = 0$ (ensuite on factorise)

$x^2 – 3^2 = 0$

$(x-3)(x+3) = 0$

Si un produit est nul alors l'un, au moins, de ses facteurs est nul.

$x – 3 = 0$ ou $x + 3 = 0$

$x – 3 + 3 = 0 + 3$ ou $x + 3 – 3 = 0 – 3$

$x = 3$ ou $x = - 3$

L'équation $x^2 = 9$ admet deux solutions 3 et – 3.

Autre méthode :

a désigne un nombre relatif.

Lorsque $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

Lorsque $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ admet une solution unique 0.

Lorsque $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

III- Application à la résolution de problèmes.

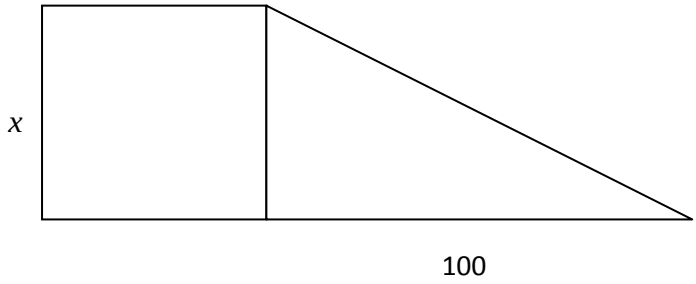
Exemple 1 :

Deux agriculteurs possèdent des champs ayant un côté commun de longueur inconnue. L'un est de forme carré de côté x m, l'autre à la forme d'un triangle rectangle tel que ses cathètes mesurent x m et 100 m. Sachant que les deux champs ont la même aire, calculer leurs dimensions.

Réponse :

On désigne par x la longueur du côté commun.

Les donnés sont représentés sur la figure suivante :



L'aire du champ carré est égale à x^2.

L'aire du champ triangulaire est égale à $\frac{100x}{2} = 50x$

Les deux champs étant de même aire, le problème peut se ramener à résoudre l'équation : $x^2 = 50x$

Soit $x^2 - 50x = 0$

$x(x - 50) = 0$

Si un produit de facteurs est nul alors l'un au moins des facteurs est nul.

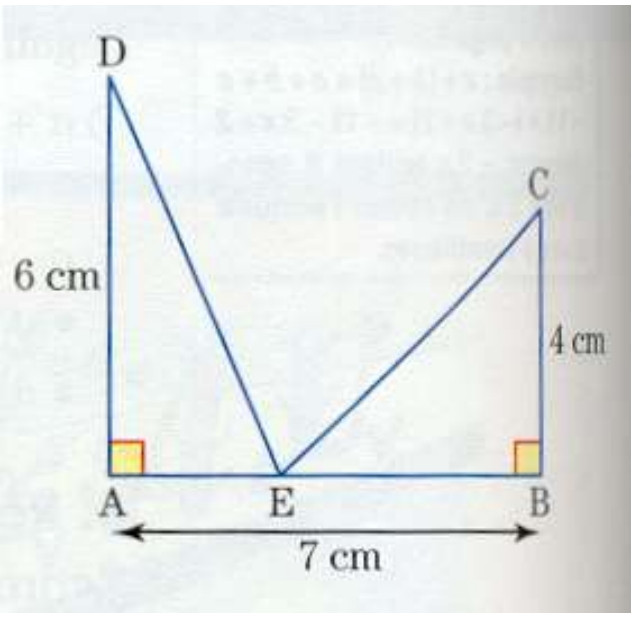
$x = 0$ ou $x - 50 = 0$

$x = 0$ ou $x = 50$

La première solution ne convient pas à la situation du problème (les champs n'existeraient pas !), on en déduit que le premier champ est un carré de côté de longueur 50m et le deuxième est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 100 m et 50 m.

Exemple 2 :

Sur la figure ci-dessous, dessinée à l'échelle. E est un point du segment [AB].
AED et BEC sont deux triangles rectangles. On veut construire la figure avec les dimensions réelles, de telle façon que les triangles AED et BEC aient la même aire.



On pose AE = x cm.
Exprimons en fonction de x les aires des triangles AED et BEC.

$$\mathcal{A}_{(AED)} = 3x \quad \text{et } \mathcal{A}_{(BEC)} = 14 - 2x$$

Quelle égalité doit vérifier x pour que ces 2 aires soient égales ?

$$\mathcal{A}_{(AED)} = \mathcal{A}_{(BEC)} \text{ donc } \quad 3x = 14 - 2x$$

$$3x = 14 - 2x$$

$$3x + 2x = 14 - 2x + 2x$$

$$5x = 14$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{14}{5}$$

$$x = 2{,}8$$

<u>Vérification :</u>

Premier membre : $3x = 3\times2{,}8 = 8{,}4$

Second membre : $14 – 2x = 14 - 2\times2{,}8 = 14 – 5{,}6 = 8{,}4$

<u>Conclusion.</u>

Pour que les 2 triangles aient la même aire, il faut que le segment [AE] mesure 2,8 cm.